折り紙と規格長方形用紙による全面多面体に関する一考察

梶　田　鈴　子 1)　　　島　内　博　行 2)

A Study of Holofacial Hedrons Using Origami and JIS-sized Paper

Suzuko Kajita 1)　　　Hiroyuki Shimauchi 2)

（2015年11月27日受理）

1．はじめに

折り紙の数理に着目して，折り紙を算数や数学の教材として活用する試みが多く行われている．折り紙を折ることで驚くほどさまざまな数理に出会うが，その最たるものは，作図不可能な角の三等分問題と立方体倍積問題が折り紙で解決できることであろう [1]．また，折鶴を幾何学的に解析する研究 [2][3] や，２次方程式の解法に利用する研究 [4] なども行われている．

この一連の研究は，教育の場における新たな発見や創造は，数学のもつ美しさや不思議さを体感することから生まれることを念頭に，「多様性」が内在する教材を通して，学習者に自由な思考と主体的な学習を促し，創造性の育成を図ることを目的とする，教科指導の実践として位置づけることが可能である．

本稿では，平面から立体への変化が実感できる教材として全面多面体の作図法を考察する．全面多面体とは，折り紙や規格長方形用紙を余すところなく使ってできる多面体のことであり，多面体の表面積と用紙の面積が等しくなるものである [5]．もちろん，用紙の継ぎ目は粘着テープで留めなければならない．

折り紙や規格長方形用紙を使った全面多面体は，複数個の多面体が辺でつながるように作図することもできるが，本稿では，１つの多面体を作成する場合に限定した．その際，全面多面体を作図するにあたっての基本的な考え方として，色折り紙を白い裏が見えないように面積が半分になるように折り（図１），できあがった二重構造を持つ平面の隙間に空気を入れて，あるいは，折り目をずらすことによって膨らませるようなイメージで行った．

本稿で紹介する折り紙を使った全面多面体の作図法については，すでに [6] で報告したものもあるが，体積の計算を行っていなかった．そのため，本稿では折り紙を使って作図した全面多面体が四面体になる場合については体積を計算した．

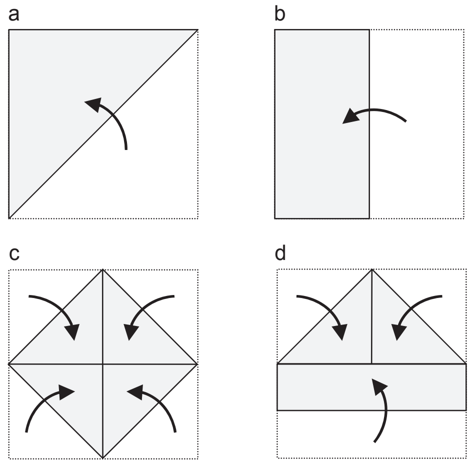

図１　面積が半分になる折り紙の折り方

なお，本稿では，折り紙の一辺の長さは１，規格長方形用紙の短辺は１，長辺は$\sqrt{2}$とし，折り図は山折りを実線（―――），谷折りを破線（…………）で表す．

2．図1a に基づく全面多面体

2.1　折り紙の場合

折り紙の場合には，図２のように折ると全面多面体になる [6]．ただし，$0 < a \leq \frac{1}{2}$ とする．$\frac{1}{2} < a < 1$ の場合は，折り紙の右上頂点から左下頂点を結ぶ対角線を軸として $0 < a \leq \frac{1}{2}$ の場合と対象な折り図になる．

図2a は図2b において $a = \frac{1}{2}$ になるときである．この全面多面体の体積は，できあがった四面体の各辺の長さをもとに，オイラーの体積公式に基づき計算することができる [7]．この公式を使うと，図2b の折り図に基づき作られる全面多面体の体積 V_a は，

別刷請求先：梶田鈴子，中村学園大学短期大学部キャリア開発学科，〒814-0198　福岡市城南区別府5-7-1
E-mail：kajita@nakamura-u.ac.jp
１）中村学園大学短期大学部キャリア開発学科　　２）中村学園大学教育学部児童幼児教育学科

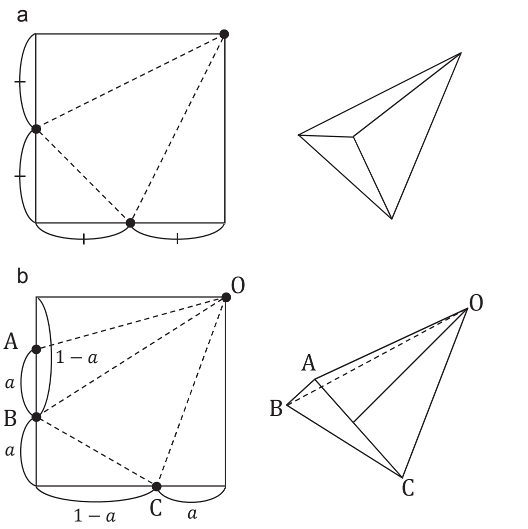

図２　折り紙の場合の図1a に基づく全面多面体の作図法

$$
\begin{aligned}
{V_a}^2 = \frac{1}{144}\{&\mathrm{OA}^2\mathrm{BC}^2(-\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2+\mathrm{OC}^2\\
&\qquad +\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2-\mathrm{BC}^2)\\
&+\mathrm{OB}^2\mathrm{AC}^2(\mathrm{OA}^2-\mathrm{OB}^2+\mathrm{OC}^2\\
&\qquad +\mathrm{AB}^2-\mathrm{AC}^2+\mathrm{BC}^2)\\
&+\mathrm{OC}^2\mathrm{AB}^2(\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2-\mathrm{OC}^2\\
&\qquad -\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2+\mathrm{BC}^2)\\
&-(\mathrm{AB}^2\mathrm{AC}^2\mathrm{BC}^2+\mathrm{OA}^2\mathrm{OB}^2\mathrm{AB}^2\\
&\quad +\mathrm{OA}^2\mathrm{OC}^2\mathrm{AC}^2+\mathrm{OB}^2\mathrm{OC}^2\mathrm{BC}^2)\}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

で得られる．ここに，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{OA}^2 &= 4a^2-4a+2\ ,\\
\mathrm{OB}^2 &= a^2-2a+2\ ,\\
\mathrm{OC}^2 &= a^2+1\ ,\\
\mathrm{AB}^2 &= a^2\ ,\\
\mathrm{AC}^2 &= a^2-2a+1\ ,\\
\mathrm{BC}^2 &= 2a^2-2a+1
\end{aligned}
$$

を代入すると，

$$ {V_a}^2 = \frac{1}{9}\,a^3(1-a)^3 $$

より

$$ V_a = \frac{1}{3}\sqrt{a^3(1-a)^3}\ . $$

また，三角形 OBC を底面とする四面体の高さ h_a は，

$$ h_a = \frac{2\sqrt{a^3(1-a)^3}}{a^2-a+1}\ . $$

V_a の式で，

$$ f(a) = a^3(1-a)^3 $$

とおき，a について微分をすると

$$ f'(a) = 3a^2(1-a)^2(1-2a)\ . $$

a	0	……	$\frac{1}{2}$
$f'(a)$	／	＋	0
$f(a)$	／		極大

よって，体積は a が $\frac{1}{2}$ のとき，すなわち図2a となるとき最大で，

$$ V_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{2^6}} = \frac{1}{24}\ \ (\fallingdotseq 0.04167) $$

となる．また，このときの高さは

$$ h_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} $$

である．

2.2　規格長方形用紙の場合

規格長方形用紙の場合には，図３で示す３つの折り方などが考えられる．

図3a で作成できる四面体については，次のように体積が計算できる．長さが $\sqrt{3}$ になる辺 CD が x 軸上にあり，点 B が y 軸上にあるように多面体 ABCD を xyz 空間上に配置する（図４）．このとき，点 B の座標は $\left(0,\frac{\sqrt{3}}{3},0\right)$，点 C の座標は $\left(\frac{\sqrt{6}}{3}-\sqrt{3},0,0\right)$，点 D の座標は $\left(\frac{\sqrt{6}}{3},0,0\right)$ である．点 A の座標を (α,β,γ) とすると，次の関係式が成り立つ．

$$ \alpha^2+\left(\beta-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+\gamma^2 = \left(\sqrt{2}-1\right)^2 , $$

$$ \left\{\alpha-\left(\frac{\sqrt{6}}{3}-\sqrt{3}\right)\right\}^2+\beta^2+\gamma^2 = 1^2 , $$

$$ \left(\alpha-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2+\beta^2+\gamma^2 = \left(\sqrt{4-2\sqrt{2}}\right)^2 . $$

これより，

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \frac{2\sqrt{6}}{3}-\sqrt{3}\ ,\\
\beta &= \frac{5\sqrt{3}}{3}-\sqrt{6}\ ,\\
\gamma &= \sqrt{10\sqrt{2}-14}
\end{aligned}
$$

となる．よって図3a で作成できる四面体は，底面積（三角形 BCD の面積）S が

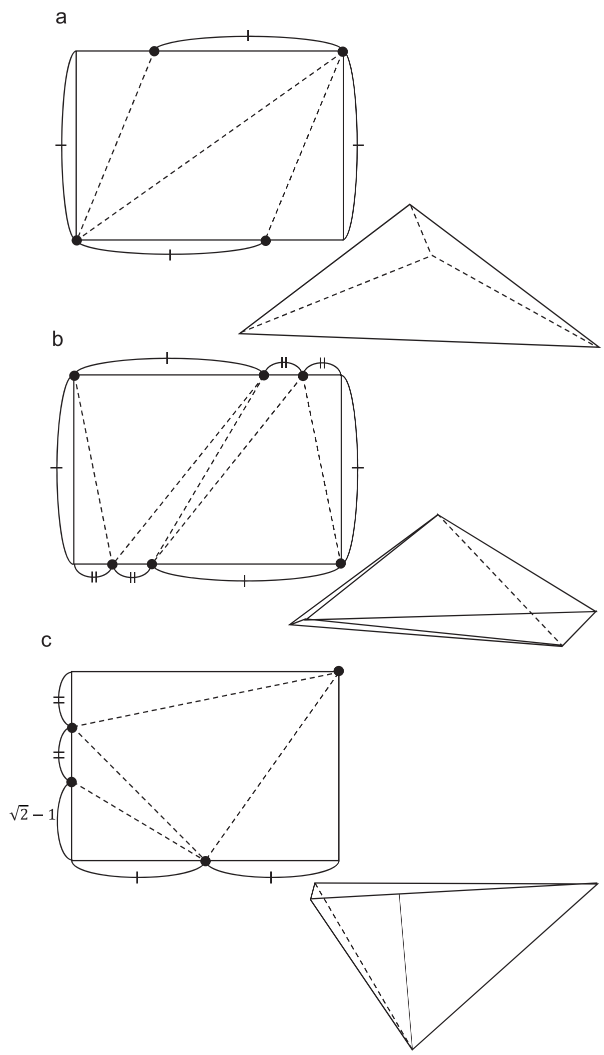

図３　規格長方形用紙の場合の図1a に基づく全面多面体の作図法

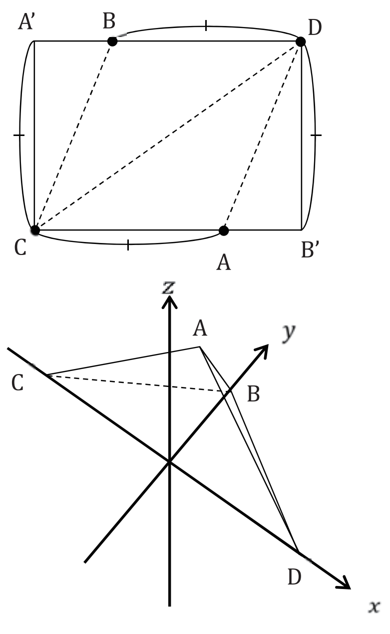

図４　図3a でできる全面多面体の *xyz* 空間への置き方

$$S=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{1}{2}$$

で，高さが γ の四面体であるので，求める体積 V は，

$$V=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{10\sqrt{2}-14}$$

$$=\frac{1}{6}\sqrt{10\sqrt{2}-14}\ (\fallingdotseq 0.06283)$$

である．

図3b の折り図によってできる全面多面体は四面体ではないが，図５に示すように図3b の折り図の一部である四角形 ACDA' から四面体（ただし三角形 ACD の面はない）を折り，それを２つ，三角形 ACD 部分で貼り合わせたものとなる．そこで四面体 ABCD の体積を図3a と同じ方法で計算を行うため，四面体 ABCD を xyz 空間上に配置する．このとき，点 B の座標は $(0,1,0)$，点 C の座標は $\left(\frac{\sqrt{2}-3}{2},0,0\right)$，点 D の座標は $\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2},0,0\right)$ である．点 A の座標を (α,β,γ) とすると，次の関係式が成り立つ．

$$\alpha^2+(\beta-1)^2+\gamma^2=\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^2,$$

$$\left(\alpha-\frac{\sqrt{2}-3}{2}\right)^2+\beta^2+\gamma^2=\left(\sqrt{7-4\sqrt{2}}\right)^2,$$

$$\left(\alpha-\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^2+\beta^2+\gamma^2=1\ .$$

これにより，

$$\alpha=\frac{4-3\sqrt{2}}{2},$$

$$\beta=\frac{9}{4}\left(\sqrt{2}-1\right),$$

$$\gamma=\frac{\sqrt{322\sqrt{2}-455}}{4}$$

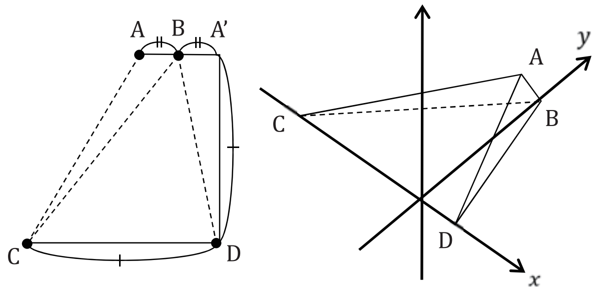

図５　図3b でできる全面多面体の体積計算のもとになる図形と *xyz* 空間への置き方

となる．よって図3b で作成できる四面体は，底面積（三角形 BCD の面積）S が

$$S=\frac{1}{2}\times 1\times 1=\frac{1}{2}$$

で，高さが γ の四面体であるので，求める体積 V は，

$$V=2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{322\sqrt{2}-455}}{4}$$
$$=\frac{1}{12}\sqrt{322\sqrt{2}-455}\ (\fallingdotseq 0.05115)$$

である．

図3c の折り図によってできる全面多面体は四面体になる．図６のように四面体 ABCD を xyz 空間上に配置すると，点 B の座標は $\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$，点 C の座標は $\left(1-\sqrt{2},0,0\right)$，点 D の座標は $(1,0,0)$ である．点 A の座標を (α,β,γ) とすると，次の関係式が成り立つ．

$$\alpha^2+\left(\beta-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\gamma^2=1\,,$$

$$\left\{\alpha-\left(1-\sqrt{2}\right)\right\}^2+\beta^2+\gamma^2=\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)^2\,,$$

$$(\alpha-1)^2+\beta^2+\gamma^2=\left(\frac{\sqrt{14-4\sqrt{2}}}{2}\right)^2\,.$$

これより，

$$\alpha=1-\sqrt{2}\,,$$
$$\beta=2\sqrt{2}-3\,,$$
$$\gamma=\frac{\sqrt{44\sqrt{2}-62}}{2}$$

となる．よって図3a で作成できる四面体は，底面積（三角形 BCD の面積）S が

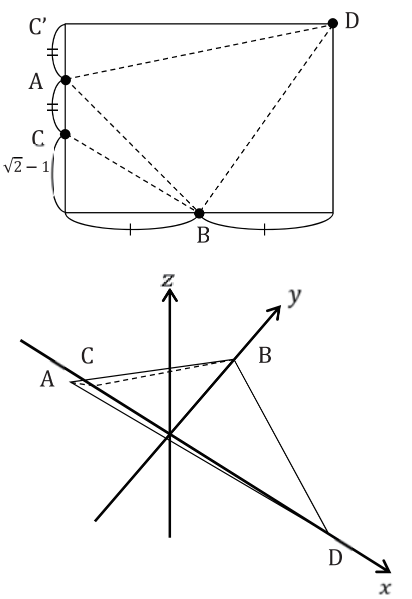

図６　図3c でできる全面多面体の xyz 空間への置き方

$$S=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}$$

で，高さが γ の四面体であるので，求める体積 V は，

$$V=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{44\sqrt{2}-62}}{2}$$
$$=\frac{1}{12}\sqrt{44\sqrt{2}-62}\ (\fallingdotseq 0.03956)$$

である．

3．図1b に基づく全面多面体

3.1　折り紙の場合

図1b に示した面積半分の折り紙を図７のように円筒状に膨らませて，上下の縁を別方向に重ね合わせると１つの多面体ができる．ここで，θ の単位はラジアンである．上下の縁を重ね合わせる方向を $\theta=\frac{\pi}{2}$ になるようにすると図8a，一般的には図8b のようになる [6]．これらは，いずれも同じ三角形４つでできる等面四面体になる．なお，円周の長さが１の半径は $\frac{1}{2\pi}$ であるため，図8b に示す辺の長さとなる．

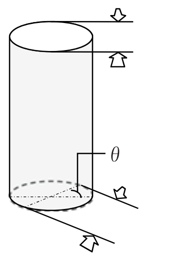

図７　円筒の縁の閉じ方

この等面四面体の体積であるが，2.2で用いたように四面体を xyz 空間に置いて計算する方法もあるが，ここでは，等面多面体を直方体に埋め込める性質を使って計算を試みる．図９のように，等面四面体 ABCD の側面の三角形の一辺の長さを p，q，r，埋め込む直方体

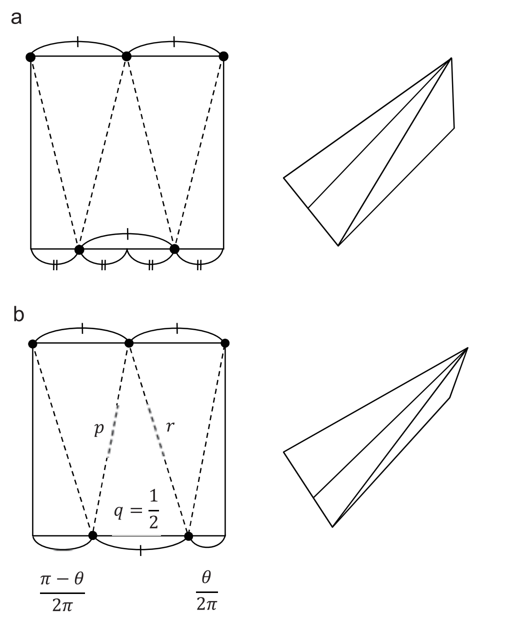

図８　折り紙の場合の図1b に基づく全面多面体の作図法

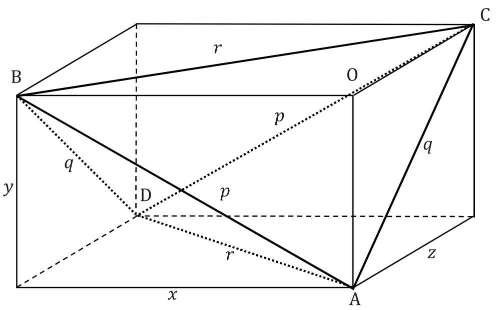

図９　等面四面体の直方体への埋め込み

の一辺の長さを x，y，z とする．

そのとき，三平方の定理より，

$$x^2+y^2=p^2\ ,$$
$$y^2+z^2=q^2\ ,$$
$$z^2+x^2=r^2$$

となるので，これを x，y，z について解くと，

$$x=\sqrt{\frac{p^2-q^2+r^2}{2}}\ , \tag{2}$$

$$y=\sqrt{\frac{p^2+q^2-r^2}{2}}\ , \tag{3}$$

$$z=\sqrt{\frac{-p^2+q^2+z^2}{2}} \tag{4}$$

が得られる．

等面四面体は直方体から四面体 OABC も含めて四面体 OABC と合同な四面体を４つ切り落としたものとみなせるので，等面四面体 ABCD の体積 V は，

$$V=xyz-4\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}xyz$$

すなわち

$$V=\frac{1}{3}xyz \tag{5}$$

となる．

図8b で作成できる等面四面体を構成する三角形の一辺の長さは，

$$p=\sqrt{\frac{4\pi^2+\theta^2}{4\pi^2}}\ ,$$

$$q=\frac{1}{2}\ ,$$

$$r=\sqrt{\frac{5\pi^2-2\pi\theta+\theta^2}{4\pi^2}}$$

となるので，これより，

$$x=\sqrt{\frac{\theta^2-\pi\theta+4\pi^2}{4\pi^2}}\ ,$$

$$y=\sqrt{\frac{\theta}{4\pi}}\ ,$$

$$z=\sqrt{\frac{\pi-\theta}{4\pi}}$$

となる．したがって，体積 V_θ と高さ h_θ は，

$$V_\theta=\frac{1}{24\pi^2}\sqrt{\theta(\pi-\theta)(\theta^2-\pi\theta+4\pi^2)}\ ,$$

$$h_\theta=\frac{1}{2\pi^2}\sqrt{\theta(\pi-\theta)(\theta^2-\pi\theta+4\pi^2)}$$

である．

ここで，

$$f(\theta)=\theta(\pi-\theta)(\theta^2-\pi\theta+4\pi^2)$$

とおき，θ について微分をすると

$$f'(\theta)=4\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)(\theta^2-\pi\theta+2\pi^2)\ .$$

θ	0	……	$\frac{\pi}{2}$	……	1
$f'(\theta)$	／	＋	0	－	／
$f(\theta)$	／		極大		／

これより，体積は θ が $\frac{\pi}{2}$ のとき最大で，

$$V_{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{24\pi^2}\sqrt{\frac{\pi}{2}\times\frac{\pi}{2}\times\left(\frac{\pi^2}{4}-\frac{\pi^2}{2}+4\pi^2\right)}$$

$$=\frac{\sqrt{15}}{96}\quad(\fallingdotseq 0.04034)\ ,$$

$$h_{\frac{\pi}{2}}=\frac{\sqrt{15}}{8}$$

である．これは，図2a で作図される全面多面体より体積が小さくなる．

3.2　規格長方形用紙の場合

規格長方形用紙の場合は，円筒の作り方が２通りあるので，図10に示す折り方が考えられる．

体積の計算であるが，基本的に折り紙の場合と同じ方法で計算することができる．図10a の場合には体積 V_θ と高さ h_θ は，

$$V_\theta=\frac{\sqrt{2}}{12\pi^2}\sqrt{\theta(\pi-\theta)(\theta^2-\pi\theta+2\pi^2)}\ ,$$

$$h_\theta=\frac{1}{\pi^2}\sqrt{\theta(\pi-\theta)(\theta^2-\pi\theta+2\pi^2)}\ .$$

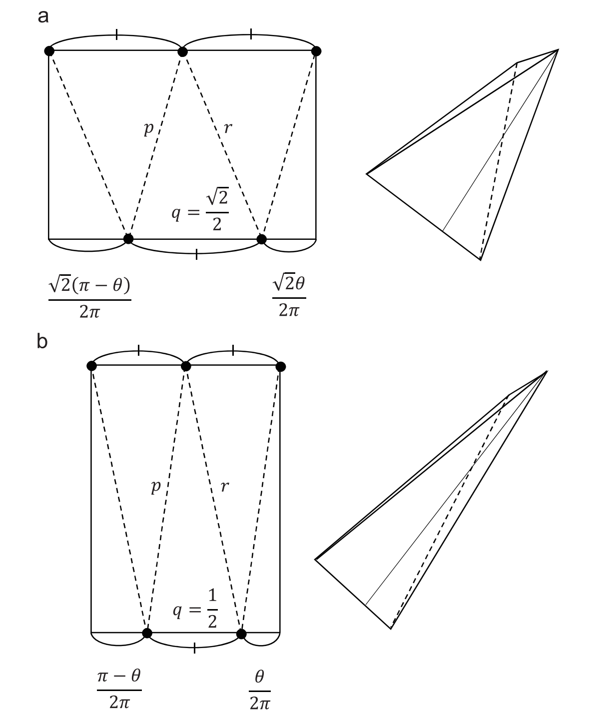

図10　規格長方形用紙の場合の図1b に基づく全面多面体の作図法

体積は θ が $\frac{\pi}{2}$ のとき最大となり，

$$V_{\frac{\pi}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{12\pi^2}\sqrt{\frac{7\pi^4}{16}}=\frac{\sqrt{14}}{48}\ (\fallingdotseq 0.07795),$$

$$h_{\frac{\pi}{2}}=\frac{\sqrt{7}}{4}$$

である．

一方，図10b の場合には体積 V_θ と高さ h_θ は，

$$V_\theta=\frac{1}{24\pi^2}\sqrt{\theta(\pi-\theta)(\theta^2-\pi\theta+8\pi^2)},$$

$$h_\theta=\frac{\sqrt{2}}{4\pi^2}\sqrt{\theta(\pi-\theta)(\theta^2-\pi\theta+8\pi^2)}.$$

体積は θ が $\frac{\pi}{2}$ のとき最大となり，

$$V_{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{24\pi^2}\sqrt{\frac{31\pi^4}{16}}=\frac{\sqrt{31}}{96}\ (\fallingdotseq 0.05800),$$

$$h_{\frac{\pi}{2}}=\frac{\sqrt{62}}{16}$$

である．

4．図1c に基づく全面多面体

4.1　折り紙の場合

折り紙の場合には，図11に示す折り方がある [6]．た

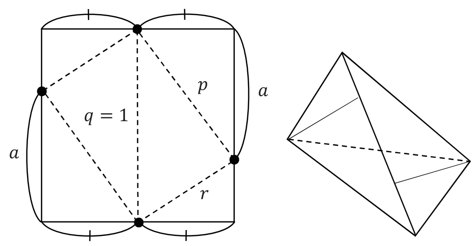

図11　折り紙の場合の図1c に基づく全面多面体の作図法

だし，$0<a<\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}<a<1$ である．

これによってできる全面多面体は，等面四面体である．そこで，3.1と同様に体積の計算を行う．等面四面体の側面の三角形の一辺の長さを p，q，r とすると，

$$p=\sqrt{a^2+\frac{1}{4}},$$

$$q=1,$$

$$r=\sqrt{a^2-2a+\frac{5}{4}}$$

である．よって，埋め込む直方体の一辺の長さを x，y，z とすると，

$$x=\frac{1}{2}\sqrt{4a^2-4a+1},$$

$$y=\sqrt{a},$$

$$z=\sqrt{1-a}$$

となる．したがって，体積 V_a と高さ h_a は，

$$V_a=\frac{1}{6}\sqrt{a(1-a)(4a^2-4a+1)},$$

$$h_a=2\sqrt{a(1-a)(4a^2-4a+1)}$$

となる．

ここで，

$$f(a)=a(1-a)(4a^2-4a+1)$$

とすると，

$$\begin{aligned}f'(a)&=-16a^3+24a^2-10a+1\\&=-2\left(a-\frac{1}{2}\right)(8a^2-8a+1).\end{aligned}$$

a	0	…	$\frac{2-\sqrt{2}}{4}$	…	$\frac{1}{2}$	…	$\frac{2+\sqrt{2}}{4}$	…	1
$f'(a)$	／	＋	0	－	0	＋	0	－	／
$f(a)$	0		極大		0		極大		0

これより，体積 V_a は a が $\frac{2\pm\sqrt{2}}{4}$ のとき最大となり，

$$V_{\frac{2\pm\sqrt{2}}{4}} = \frac{1}{24}\ (\fallingdotseq 0.04167)\ ,$$

$$h_{\frac{2\pm\sqrt{2}}{4}} = \frac{1}{2}$$

である．また，このとき，折り紙で作成できる等面四面体となる全面多面体の中で体積が最大になると考えられるが，図2a の折り図で作れる全面多面体と同じ体積である．

4.2　規格長方形用紙の場合

規格長方形用紙の場合には，図12に示すような折り図になる．

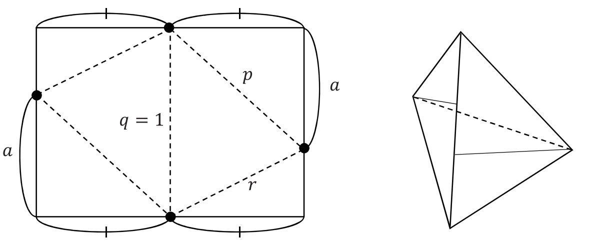

図12　規格長方形用紙の場合の図1c に基づく全面多面体の作図法

この場合も，等面四面体ができる．したがって，3.1と同様に体積を計算することができる．等面四面体の側面の三角形の一辺の長さを p，q，r とすると，

$$p = \sqrt{a^2 + \frac{1}{2}}\ ,$$

$$q = 1\ ,$$

$$r = \sqrt{a^2 - 2a + \frac{3}{2}}$$

である．よって，埋め込む直方体の一辺の長さを x，y，z とすると，

$$x = \sqrt{\frac{2a^2 - 2a + 1}{2}}\ ,$$

$$y = \sqrt{a}\ ,$$

$$\mathrm{z} = \sqrt{1-a}$$

となることから，体積 V_a と高さ h_a は，

$$V_a = \frac{\sqrt{2}}{6}\sqrt{a(1-a)(2a^2 - 2a + 1)}\ ,$$

$$h_a = 2\sqrt{a(1-a)(2a^2 - 2a + 1)}$$

となる．

ここで，

$$f(a) = \ a(1-a)(2a^2 - 2a + 1)$$

とおき，a について微分をすると

$$f'(a) = -(2\mathrm{a}-1)^3\ .$$

a	0	……	$\frac{1}{2}$	……	1
$f'(a)$	／	＋	0	－	／
$f(a)$	／		極大		／

これより，体積は a が $\frac{1}{2}$ のとき最大で，

$$V_{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{6}\frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{1}{12}\ (\fallingdotseq 0.08333)\ ,$$

$$h_{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

である．これは図13に示すように折るときであり，規格長方形用紙で全面多面体を折ったときに体積最大になると考えられる [5].

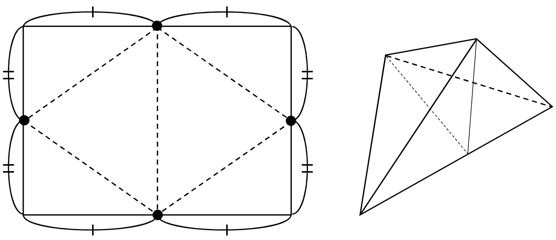

図13　図12において体積が最大になる作図法

なお，図12において，$a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ としたときにできる四面体はタカフミ四面体 [5] と呼ばれているが，タカフミ四面体の体積 V と高さ h は，

$$V = \frac{(\sqrt{2}-1)\sqrt[4]{2}}{6}\ (\fallingdotseq 0.08210)\ ,$$

$$h = (2-\sqrt{2})\sqrt[4]{2}$$

となる．

5．図1d に基づく全面多面体

この場合には，折り紙であれば図14a，規格長方形用紙であれば図14b のような折り図が考えられる．ただし，$0 \leq a < \frac{1}{2}$ である．$a = \frac{1}{2}$ の場合には，いずれも平面になってしまう．また，$\frac{1}{2} < a \leq 1$ の場合には，各用紙を左右二等分する線分を軸として $0 \leq a < \frac{1}{2}$ の場合と対称な折り図となる．

図14a の折り図によってできる全面多面体は，図15に示すように網目の面で分けると太い実線で切った時にできる２つの四面体（ただし三角形 BCE に対応する面はない）でできていることが分かる．したがって，体積

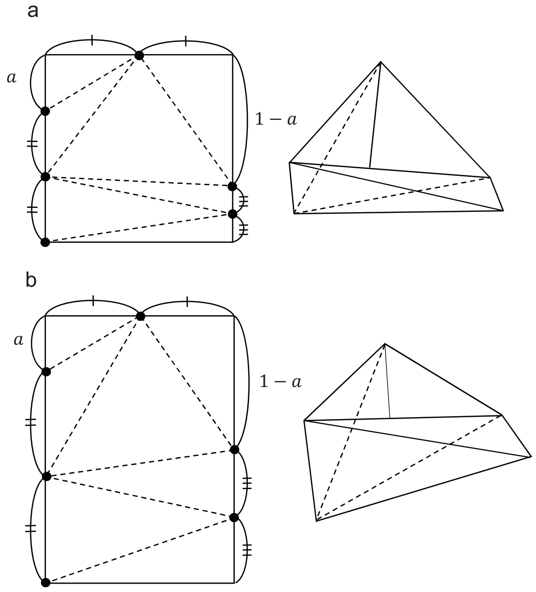

図14　図1d に基づく全面多面体の作図法

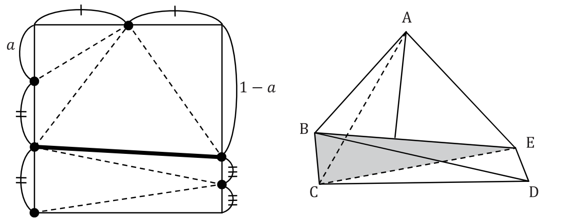

図15　図14a でできる全面多面体の体積計算の考え方

計算はこの２つの四面体の計算を行えばよい．

四面体 ABCE の体積 $V1_a$と四面体 BCDE の体積 $V2_a$ を2.2で述べた考え方に基づき計算を行うと，

$$V1_a = \frac{\sqrt{-16a^6 + 12a^4 + 4a^3 - 4a^2 - 2a + 1}}{24},$$

$$V2_a = \frac{\sqrt{-4a^6 + 4a^5 - 9a^4 + 4a^3}}{24}.$$

よって，求める体積 V_a は，

$$V_a = \frac{\sqrt{-16a^6 + 12a^4 + 4a^3 - 4a^2 - 2a + 1}}{24} + \frac{\sqrt{-4a^6 + 4a^5 - 9a^4 + 4a^3}}{24}$$

である．$V1_a$，$V2_a$，V_a の値をプロットすると図16のようになるが，a＝0 のとき最大となり，$V_0 = \frac{1}{24}$ となる．また，このときの折り図は，図2a と一致する．

図14b の折り図では，計算が煩雑なため一般的な計算はしなかったが，$a = 0$ のときには図17のような折り図になる．このときの体積 V も図14a と同様に２つの四面体に分けて計算を行うと，

$$V = \frac{\sqrt{2\sqrt{2}-1} + \sqrt{32\sqrt{2}-45}}{24} \quad (\fallingdotseq 0.07738)$$

となる．

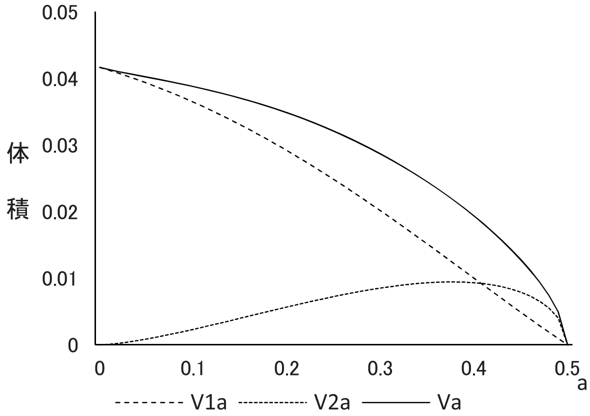

図16　図14a でできる全面多面体の体積の変化

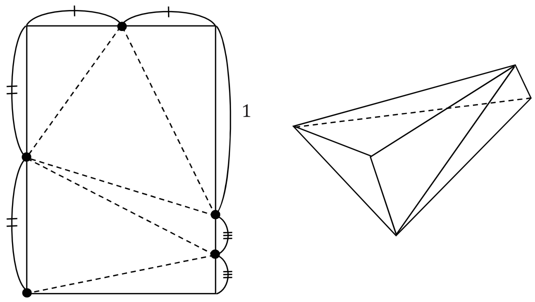

図17　図15b で a=0となる全面多面体

6．規格長方形用紙によるその他の全面多面体

折り紙を使った全面多面体の作図法については，２節から５節までに述べたもの以外にもさまざまな作図法が考えられる [6]．

一方，規格長方形用紙の場合には，図10a と図12，13の折り図については [5] ですでに紹介されているが，こちらも同様にさまざまな作図法が考えられる．本稿では，図１に基づく折り方を基本としているが，図1b の変則として短辺あるいは長辺の両端を少しずらして重ねることにより（図18），多面体を作図することもできる（図19）．

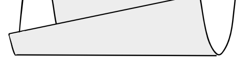

図18　向かい合う辺のずらし方

なお，これらについては，体積の計算は行っていない．

7．おわりに

折り紙や規格長方形用紙を用いた全面多面体は，本稿で述べたもの以外にも多く存在する．例えば，図1b に基づき図７のように円筒状に膨らませて，上下の縁を別方向に重ね合わせると１つの多面体ができるが，同じ

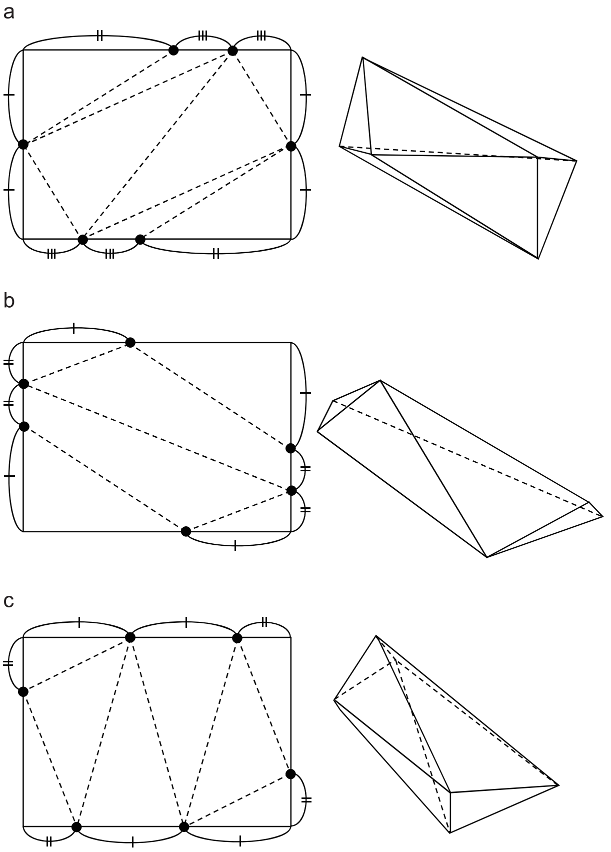

図19　規格長方形用紙の場合の図18に基づく全面多面体の作図法

1b から膨らませずに両縁を内側に押し込むようにして多面体を作ることもできる（図20）．

全面多面体は，１枚の紙から多面体を作り出すことにより平面から立体への変化を実感できる良い教材である．本稿で扱った用紙は折り紙と規格長方形用紙であったが，図1b，1c，1d に基づき作成する場合は，図11で $a=\frac{1}{2}$ のとき全面多面体ではなく平面になるなどの特殊な場合を除き，同じような作図法で全面多面体を作成することができる．しかし，その一方で，図1a に基づく場合には折り紙と規格長方形用紙では全く違う作図法となる．このことには，用紙の縦横の長さが等しいか等しくないかが大きく影響を及ぼしている．

また，本稿においては，折り紙や規格長方形用紙から１個の多面体ができるように作図し，その体積計算を主として行った．全面多面体が四面体になる場合については，その体積は少なくともオイラーの体積公式により計算できる．さらに等面四面体であれば，直方体に埋め込むことによりその計算はより簡単になるが，その計算方法とオイラーの体積公式との間には関係性がある．実際，等面四面体の側面の三角形の一辺の長さを p，q，r とすると，オイラーの体積公式⑴において，$\mathrm{OA}=\mathrm{BC}=p$，$\mathrm{OB}=\mathrm{AC}=q$，$\mathrm{OC}=\mathrm{AB}=r$ と置き直

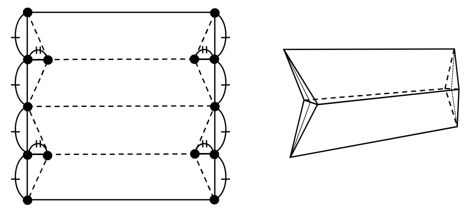

図20　図1b で両縁を内側に押し込んでできる全面多面体

すことができる．このとき，

$$
\begin{aligned}
V^2 &= \frac{1}{144}\{p^4(-2p^2+2q^2+2r^2) \\
&\qquad +q^4(2p^2-2q^2+2r^2) \\
&\qquad +r^4(2p^2+2q^2-2r^2)-4p^2q^2r^2\} \\
&= \frac{1}{72}\{p^4(-p^2+q^2+r^2)+q^4(p^2-q^2+r^2) \\
&\qquad +r^4(p^2+q^2-r^2)-2p^2q^2r^2\} \\
&= \frac{1}{72}\{p^4(-p^2+q^2+r^2)-q^4(-p^2+q^2+r^2) \\
&\qquad -r^4(-p^2+q^2+r^2) \\
&\qquad +2q^2r^2(-p^2+q^2+r^2)\} \\
&= \frac{1}{72}(-p^2+q^2+r^2)(p^4-q^4-r^4+2q^2r^2) \\
&= \frac{1}{72}(-p^2+q^2+r^2)\{p^4-(q^2-r^2)\} \\
&= \frac{1}{72}(-p^2+q^2+r^2)(p^2-q^2+r^2)(p^2+q^2-r^2)\,.
\end{aligned}
$$

ゆえに

$$V=\frac{\sqrt{2}}{12}\sqrt{(-p^2+q^2+r^2)(p^2-q^2+r^2)(p^2+q^2-r^2)}$$

となり，等面四面体を直方体に埋め込んで体積を計算したときの式⑸に式⑵⑶⑷を代入したときの計算式と同じであることがわかる．

全面多面体は正方形や長方形の用紙に限らず作成可能である．そこで，面積が同じになる折り紙と規格長方形用紙と正三角形用紙でできる等面四面体の体積を比較してみた．用紙の面積を１としたとき，折り紙からできる等面四面体の最大の体積は4.1の結果より $\frac{1}{24}$（≒ 0.04167），規格長方形用紙からできる等面四面体の最大の体積は4.2の結果より $\frac{\sqrt[4]{2}}{24}$（≒ 0.04955）である．一方，正三角形用紙からできる全面多面体については，少なくとも正四面体の体積が $\frac{\sqrt{2}\sqrt[4]{3}}{36}$（≒ 0.05170）となる．したがって，同じ面積の紙から体積最大の等面四面体を考えるとき，もちろん折り方にもよるが，折り紙や規格長方形用紙より正三角形用紙で作成する方が体積が大きくなる．

今後は，折り紙や規格長方形用紙に限らず，正三角形

用紙なども対象に全面多面体の作図法を考察したい．そして，体積の計算はもちろんであるが，その用紙独特の特質のようなものについて検討を行い，全面多面体の作図はもとより，算数・数学の教材として“紙を折る”ことのさらなる可能性を見出したいと考えている．

参考文献

[1] 阿部恒，すごいぞ折り紙－折り紙の発想で幾何を楽しむ，日本評論社，2003.

[2] 伏見康治・伏見満枝，折り紙の幾何学，日本評論社，1984.

[3] 川崎敏和，バラと折り紙と数学と，森北出版，1998.

[4] ロベルト・ゲレトシュレーガー著，深川英俊訳，折紙の数学，森北出版，2002.

[5] 芳賀和夫，オリガミクスⅡ，日本評論社，2005.

[6] 梶田鈴子，島内博行，折り紙による全面多面体の作図法，中村学園大学・中村学園大学短期大学部研究紀要第42号，339-347，2010.

[7] 村崎武明，四面体の体積公式について，群馬大学教育学部紀要自然科学編第51号，19-34，2003.