算数科教材としてのロンサム行列

村　原　英　樹

Lonesum Matrix as Instructional Materials in Teaching Arithmetic

Hideki Murahara

（2017年11月22日受理）

1．はじめに

小学校学習指導要領（平成29年３月公示）の「第３節 算数」には，「数学的な見方・考え方を働かせ，数学的活動を通して，数学的に考える資質・能力を育成する」ことの大切さについて書かれている。ここでの数学的活動とは，「児童が目的意識をもって主体的に取り組む算数や数学にかかわりのある様々な活動」を意味しているが，その視点から見たとき，児童が主体的に取り組むことができる算数科の教材を用意しておくことは，児童の思考力を育む教育を行うという観点から，ある程度の重要性を持っていると考えられる。またそれと同時に，既存の枠にとらわれない何かしらの新しい教材について考察することは，算数科指導における固定概念の払拭という意味においても重要である。

そこで本稿では，既存の型にはまりすぎることがなく，数学的活動の楽しさや数学のよさに気付くことができ，単発的・発展的に取り上げることができる教材の例として，「ロンサム行列」を挙げる。このロンサム行列については，後できちんとした定義や性質が述べられるが，(1) 小学生にも容易に理解することができ，(2) 問題を解決する中で，思考力・判断力・表現力等を育成するために適切な課題を児童に与え，(3) 最先端の数学（整数論・情報理論などを含むいくつかの分野）とも関わりのある，一般にはそれほど知られていない教材であると思われる。

2．ロンサム行列の定義

まずはじめに，本稿で用いる「行列」・「ベクトル」・「ロンサム行列」の定義について説明する。行列とは数などを行と列に沿って矩形状に配列したものであり，例えば行列 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ は２行×３列の行列のサイズを持つ行列である。またベクトルは，一般に「大きさ」と「向き」をもつ量であると定義されるが，本稿では主にそれらを成分表示したもののみを扱う。すなわち，本稿で述べられるベクトルは，いくつかの数字を横または縦に並べた数字の組のことをいう。例えばベクトル（２，１，１）は，” 2 ” と ” 1 ” と ” 0 ” を横に並べた数字の組で行ベクトルと呼ばれる。同様に，ベクトル $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ は列ベクトルと呼ばれる。

さてここで，ロンサム行列（lonesum matrix）とは，各成分が０か１の行列で，その行列のそれぞれの行の和から得られる列ベクトルと，列の和から得られる行ベクトルによって一意的に復元できるようなものを指す。例えば $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とすると，この行列Ａの１行目の数字の和は ” 2 ”，２行目の数字の和は ” 0 ” となるので，対応する列ベクトル（行列Ａの各行の和）は $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ となる。同様に，行列Ａの１列目の数字の和は ” 1 ”，２列目の和は ” 1 ”，３列目の和は ” 0 ” となるので，対応する行ベクトル（行列Ａの各列の和）は（１，１，０）となる。まとめると，

「行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ に対応する列ベクトルは $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$，行ベクトルは（１，１，０）」

となる。そこで今度は，ここで得られた「列ベクトル $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ と行ベクトル（１，１，0）」の２つの情報だけを見て，もとの行列Ａが一意的に復元できるかについて考える。少し考えれば容易にわかるように，復元するべき行列は，上段左側の成分と上段真ん中の成分のみが１で，他の成分はすべて０でなければならず，きちんと復元することができることがわかる。すなわち，行列Ａは「列ベクトル $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ と行ベクトル（１，１，0）」の２つの情報だけを見て復元することができるため，ロンサム行列であることがわかる。

ところで，下の様に図を書いて考えればこのことはさ

別刷請求先：村原英樹，中村学園大学教育学部，〒814-0198　福岡市城南区別府5-7-1
E-mail：hmurahara@nakamura-u.ac.jp

らに明らかである。（実際に授業でロンサム行列を用いる際には，そのような図の書き方を児童が自然に自ら考えることができるように教え導くことが望ましい。）例えば上の例であれば，復元したい行列を（今回は説明のために）$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$ と書くことにすれば，

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$(1,\ 1,\ 0)$$

より，$a+b+c=2$，$d+e+f=0$，$a+d=1$，$b+e=1$，$c+f=0$ だから，$a=b=1$，$c=d=e=f=0$ がわかる。（これを文字を用いてではなく，図示と初等的な思考によって考えさせることが重要である。）

次に別の例として，ロンサム行列でない行列Ｂ＝$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ について考察する。行列Ａの場合と同様に，

「行列 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ に対応する列ベクトルは $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$，

行ベクトルは（２，１，１）」

であることがわかる。このとき，行列Ｂは先ほどの状況とは異なり「列ベクトル $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ と行ベクトル（１，１，０）」の２つの情報だけを見て一意的に復元することができない。実際，行列 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ に対応する列ベクトルは $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$，行ベクトルは（２，１，１）であるが，この行列Ｂ以外にも行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ も同じ列ベクトルと行ベクトルを持つ。ゆえに，行列Ｂはロンサム行列でないことがわかる。

３．ロンサム行列の算数科教材としての活用例

ロンサム行列を算数科の教材として活用する場合，例えば（表１）のような指導例が考えられる。このような授業展開では，「０と１の足し算」と「パズル的な考え方」しか使わないため，算数が苦手な児童でも比較的取り組みやすいと考えられる。また，塾などで教えられる既存の算数的な問題とは，若干趣を異にしているため，新鮮さを児童に感じさせることができる。

４．ロンサム行列の例

本節では，（簡単な考察によって結果を得ることができるため不要かもしれないが）サイズの小さな行列について，ロンサム行列とロンサム行列でない行列の例を挙げる。

$\boxed{\text{１行×１列の行列}}$

ロンサム行列：（０），（１）

ロンサム行列でない行列：なし

$\boxed{\text{１行×２列の行列}}$

ロンサム行列：（００），（１０），（０１），（１１），

ロンサム行列でない行列：なし

（２行×１列の行列）

ロンサム行列：$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

ロンサム行列でない行列：なし

※行と列を入れかえた行列については，入れかえる前の

表１　指導例

＜学習活動と内容＞	＜教師の支援＞
１，学習問題を把握する。	１－１， $\begin{array}{\|ccc\|} \hline 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$ を黒板に書く。 「発問：一行目を足すといくつになりますか？」などとしながら， $\begin{array}{\|ccc\|c} \hline 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & \end{array}$ の作り方を説明する。 １－２，□の中の数字を消して， $\begin{array}{\|ccc\|c} \hline \ & \ & \ & 2 \\ \ & \ & \ & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & \end{array}$ とし，０と１だけを使って，もとの□の中身が復元できるかについて考えさせる。
２，本時のめあてをつくる。	２，「めあて：□の中がどうすれば求まるのかを考えよう。」などとし，めあてを立てる。
３，簡単な問題に取り組む。	３，以下のような，「もとの□の中身が一意的に復元できるような問題」が何題か載ったプリントを配布し，もとの□の中身について考えさせる。 問題：□の中には，０と１のどちらかの数字が入ります。□の中に入る数字を求めよう。 $\begin{array}{\|ccc\|c} \hline \ & \ & \ & 2 \\ \ & \ & \ & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & \end{array}$
４，少しだけ難しくなった問題に取り組む。 （１）自力で問題を解く。 （２）ペア学習を行う。 （３）全体学習を行う。	４－１，ロンサム行列でない行列 $\begin{array}{\|ccc\|} \hline 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$ を黒板に書き，１－１と同様に，対応する列ベクトルと行ベクトルがそれぞれ，(2,1)を縦に並べたものと(1,1,1) になることを説明する。説明の後，□の中の数字を消した $\begin{array}{\|ccc\|c} \hline \ & \ & \ & 2 \\ \ & \ & \ & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & \end{array}$ について□の中の数字を考えると， $\begin{array}{\|ccc\|} \hline 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$ や $\begin{array}{\|ccc\|} \hline 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}$ や $\begin{array}{\|ccc\|} \hline 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$ のように，一意的に復元できないことを児童と一緒に観察・説明する。（または時間を取って，児童に考えさせる。）

<table>
<tr><td></td><td>４－２，以下のような問題が何題か載ったプリントを配布し，「□の中にはどのような数字が入るか」について考えさせる。またこの作業を通じて，答えが１つだけではないことを体験させる。

問題：□の中には，０と１のどちらかの数字が入ります。□の中には，どのような数字が入りますか？思いつくだけ書いてみよう。

$\begin{array}{|ccc|c}\hline & & & 1\\ & & & 1\\ & & & 1\\ \hline 1 & 1 & 1 & \end{array}$

４－３，児童がこの問題に取り組んで感じたことや気がついたことなどについて，まとめる。
特に，「列ベクトルの数字の和と行ベクトルの数字の和が一致すること」や「□の中の数字を消してしまったとき，もとの□の中の数字がきちんと復元できるときと，そうでないときがあること」などを全体で確認する。

※もとの数字が一通りに再現できれば，□の中の数字を覚えておく必要はなくなり，情報量の削減につながる。（情報理論と関連性がある。）</td></tr>
<tr><td>５，学習のまとめをする。</td><td>５，４－３で出た意見などをもとに，本時のまとめをする。</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td><応用学習の例></td><td>１，以下のような問題が何題か載ったプリントを配布し，「いつ，もとの□の中身が，一意的に復元できるか？」について考えさせる。

問題：□の中には，０と１のどちらかの数字が入ります。□中の数字は，ひととおりに決まりますか？

$\begin{array}{|cccc|c}\hline & & & & 2\\ & & & & 1\\ \hline 1 & 1 & 0 & 1 & \end{array}$

※（これらの問題の一般的な解答）

□が部分行列として，

$\boxed{\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{matrix}}$ や $\boxed{\begin{matrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{matrix}}$

を含んでいなければ，□の中身は一意的に復元できる。（詳しくは，第４節を参照。）

２，問題について考えることや話し合いなどを通して，上記（※）のことに気づかせる。

３，上で出た意見などをもとに，考えをまとめる。</td></tr>
</table>

行列と同様である。すなわち，「行と列を入れかえた行列がロンサム行列であること」と，「もとの行列がロンサム行列であること」は同値である。（「行と列を入れかえた行列がロンサム行列でないこと」と，「もとの行列がロンサム行列でないこと」も同値である。）従って，以下では行と列を入れかえた行列についての記述は省略する。

２行×２列の行列

ロンサム行列：$\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$

ロンサム行列でない行列：$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$

３行×２列の行列

ロンサム行列：$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0&1&1\\0&1&0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&1&0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$

ロンサム行列でない行列：$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$

５．数学的な考察

本節では，ロンサム行列に関して一般的に知られている結果について考察する。より詳しい内容に関しては，後ろに挙げた参考文献を参照すると良いと思われる。（しかしながら参考文献は，数学者向けに書かれているため，誰にでも容易に理解できるものではない。そこで本稿では，数学的な意味は保ちつつ，数学の非専門家向けに，ある程度わかりやすく理解できる解説を試みたい。）

さて，いくつかの定理を述べるために記号や用語を準備する。m 行 $\times n$ 列のサイズをもち，０と１のみを成分にもつ行列を $m \times n$ (0,1)−行列と呼ぶことにする。また，

行列Ａの上からｉ番目（ｉ行），左からｊ番目（ｊ列）の成分をa_{ij}と表すことにする。（例えば，Ａ＝$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$とすれば，Ａは2×3 (0,1)-行列で，$a_{12}$＝１である。）

まず，部分行列を定義する。行列Ｂが行列Ａの部分行列であるとは，行列Ｂが行列Ａのいくつかの行といくつかの列を取り除くことで作られる行列のことをいう。例えば，$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 部分行列である。（この場合は，もとの行列から２列目を取り除いた。）また，行列Ｂが行列Ａの部分行列であるとき，行列Ａは行列Ｂを含んでいるという。

次にフェラーズ行列の定義をする。$m \times n$ (0,1)-行列Ａがフェラーズ行列であるとは，条件

$$\begin{cases} a_{ij} = 0 \Rightarrow a_{kj} = 0 \ (k \geq i), \\ a_{ij} = 0 \Rightarrow a_{il} = 0 \ (l \geq j), \end{cases}$$

を満たす行列であるとする。（この定義は，すべての"１"が$m \times n$ (0,1)-行列Ａの左上側に固まって配置されていることを表している。例えば，$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ はフェラーズ行列であるが，$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ や $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ はフェラーズ行列ではない。）

このとき，次の定理が成り立つことがRyser [5] によって示された。

> 定理：Ａを (0,1)-フェラーズ行列とする。このとき次の条件 (1), (2), (3) は同値である。
> (1) 行列Ａがロンサム行列である。
> (2) 行列Ａが部分行列として，$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ や $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ を含んでいない。
> (3) 行列Ａは何かしらのフェラーズ行列の行と列の入れ替えによって得られる。

もしかすると，(3) に関しては若干の補足を必要とするかもしれない。例えば，$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ はフェラーズ行列であるが，この行列１列目と２列目を入れかえた行列が $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ である。上の定理を用いると，元の行列 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ はロンサム行列だから，この $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ もロンサム行列であることがわかる。

ここで，

「どのような行列がロンサム行列になっているか？」

という問題に対する答えが，上の定理によって与えられていることがわかる。すなわち，上の定理の (2) や (3) がこの問題の解答である。

さて次に，

「任意の指定されたサイズの

ロンサム行列がいくつあるか？」

という問題の答えについて簡単に言及し，本節を締めくくりたい。（しかしながら，(2) の解答を与える以下の定理を理解するためには，若干の数学的知識を必要とし，本稿ではその解説については触れない。）以下の定理は，Brewbaker [2] によって得られているロンサム行列の個数とポリ－ベルヌーイ数（Poly-Bernoulli number）による関係，金子 [4] によって得られているポリ－ベルヌーイ数の母関数に関する定理によって導かれ，鎌野 [3] にもそのことについての言及がある。

> 定理：$m \times n$ (0,1)-行列のロンサム行列の個数を$L(m,n)$とすると，
>
> $$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} L(m,n)\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!} = \frac{e^{x+y}}{e^x + e^y - e^{x+y}}$$
>
> となる。

６．おわりに

算数や数学を学ぶ上で，最もよいと思われる一つの方法として，学習者が主体的に問題に取り組むことが挙げられる。今回は「ロンサム行列」という，算数科教育ではまず取り上げられたことがない例を挙げた。このロンサム行列の性質には，いくつかの面白い特徴が見られるが，その特徴を主体的に見つけようとする試みの中で，数学的なものの見方や考え方を児童が学習することができる。

算数科の発展的な教材について考えたとき，指導者自身が数学的活動を行いながら考えたオリジナルな発展的教材には，それなり以上の価値があると思われる。しかしながら実際の所，日常の業務をこなしながら，そのような教材を次々に生み出していくのには，数学的な意味での困難が往々にしてつきまとう。本稿で挙げた教材は，発展的教材の例として唯一無二のものではないが，少なくとも，発展的な教材を作成したり授業を行ったりする上での参考になるとは思われる。

＜引用・参考文献＞

[1] 文部科学省 新学習指導要領 (平成29年３月公示) 小学校学習指導要領

[2] T. Arakawa and M. Kaneko, `On poly-Bernoulli numbers,'

Comment. Math. Univ. Sancti Pauli 48 (1999), 159–167.

[3] C. Brewbaker, `A combinatorial interpretation of the poly-Bernoulli numbers and two Fermat analogues,' Integers 8 (2008), #A02.

[4] K. Kamano, `Lonesum decomposable matrices,' arXiv:1701.07157.

[5] M. Kaneko, `Poly-Bernoulli numbers,' J. de Théorie des Nombres de Bordeaux 9 (1997), 221–228.

[6] H. J. Ryser, `Combinatorial properties of matrices of zeros and ones,' Canad. J. Math. 9 (1957), 371–377.