折り紙による全面多面体の作図法

梶　田　鈴　子[1)]　　島　内　博　行[2)]

Construction Methods for a Holofacial Hedron Using Origami

Suzuko Kajita [1)]　Hiroyuki Shimauchi [2)]

（2009年11月27日受理）

1．はじめに

折り紙は，定規やコンパスを使わずに線分の垂直二等分線や角の二等分線を簡単に折りだすことができるなど，折り紙を折ることで驚くほどさまざまな数理に出会う．その最たるものは，作図不可能な角の三等分問題と立方倍積問題が折り紙で解決できることであろう [1]．この折り紙の数理に着目して，折り紙を算数や数学の教材として活用する試みが多く行われている．

本稿では，平面から立体への変化が実感できる教材として全面多面体の作図法を考察する．全面多面体とは，折り紙を余すところなく使ってできる多面体のことであり，多面体の表面積と折り紙の面積が等しくなるものである [2]．もちろん，折り紙の継ぎ目は粘着テープで留めなければならない．作図法としては，後述の図４や図16の折り図がすでに知られている [2]．

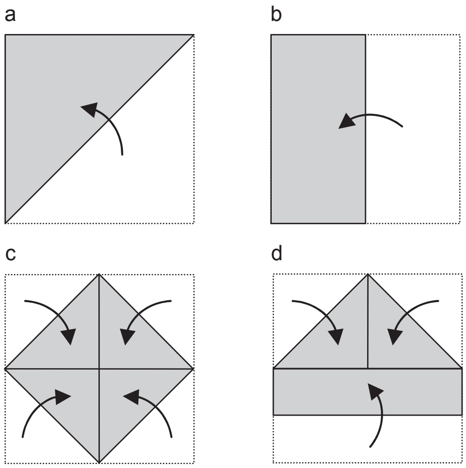

図１

全面多面体を作図するにあたって，本稿では折り紙を白い裏が見えないように面積が半分になるように折り（図１），それをもとに考察する．このような面積半分の折り方は，基本的には４種類であるが，図１ｂについては同じ長方形の形になる折り方が無数に存在する（図２）．折り紙を白い裏が見えないように面積が半分になるように折ると表も裏も色の部分になっている二重構造を持つ平面となるが，二重構造の隙間に空気を入れて，あるいは，継ぎ目をずらすことによって膨らませるようなイメージで全面多面体の作図法を考察する．

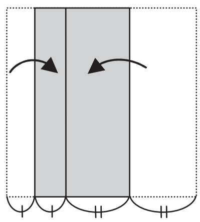
図２

なお，本稿では，全面多面体の定義を「総表面積が折り紙と同じであれば複数の多面体で構成されるものも全面多面体とする」と広義にとらえて考察する．また，正方形の折り紙の一辺の長さは１とし，折り図は山折りを実線（——），谷折りを破線（┈┈）で表す．

2．図１ａに基づく全面多面体の作図法

図１ａからは，１つから数個までの多面体からなる全面多面体を作図することができる．ここでは，多面体の個数が１つとなる場合から３つとなる場合までの作図について述べる．

別刷請求先：梶田鈴子，中村学園大学短期大学部キャリア開発学科，〒814-0198　福岡市城南区別府5-7-1
E-mail：kajita@nakamura-u.ac.jp
1）中村学園大学短期大学部キャリア開発学科　　2）中村学園大学人間発達学部人間発達学科

（1）１つの多面体となる場合の作図

１つの多面体となる全面多面体を作図する考え方として，図３のように二重になった直角三角形に膨らみをもたせて点Ａに点Ｂを合わせてふたをするようなイメージで全面多面体を作る方法がある．作図をすると図４ａのようになる．また，点Ｂの位置をずらすことにより，図４ｂのような作図も考えられる．これらは，基本的に異なる４つの三角形によってできる不等面四面体となり，点Ｂを合わせる位置により無数の多面体が存在する．

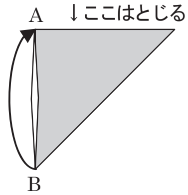

図３

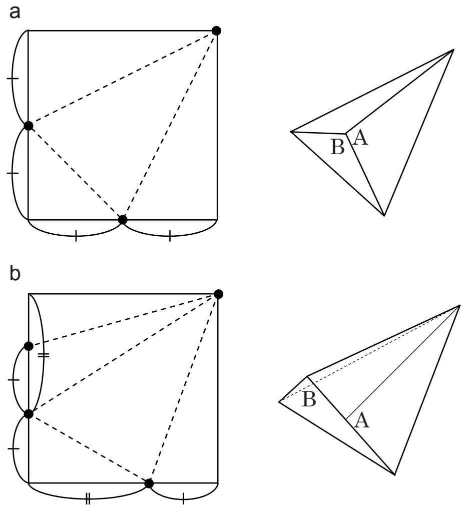

図４

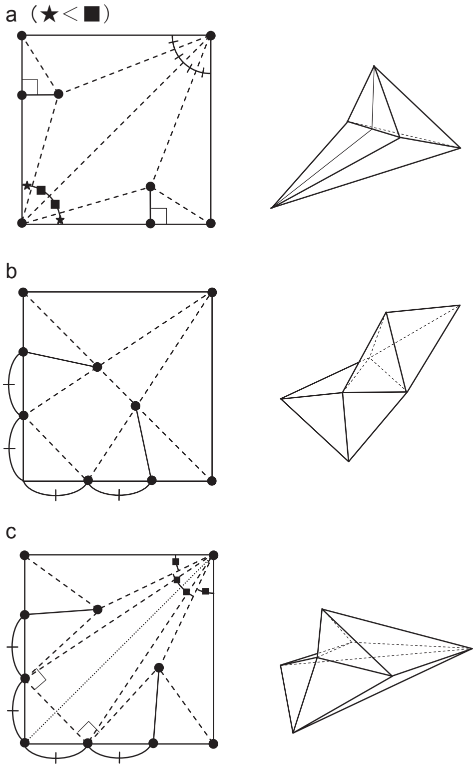

図５

図４で示した作図法は，一般的に考えられる方法であろう．そのほかの図３の膨らみにふたをする方法としては，例えば図５のような作図が考えられる．

また，図６のように頂点Ａの両側を膨らませる場合には，両側に図５ａ，図５ｂで示した作図を適用した作図を考えることができる（図７）．

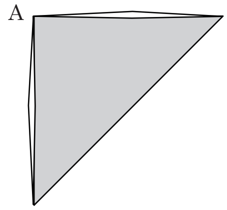

図６

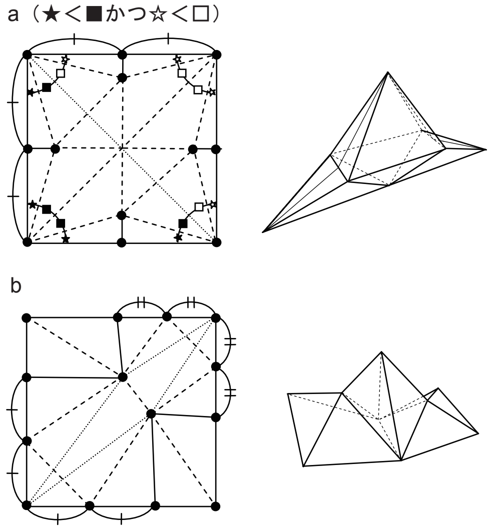

図７

（2）２つの多面体となる場合の作図

多面体が２つとなる場合は，共有する線分でつながる．例えば図８の場合には，線分 AB でつながる２つの多面体を作図することになるが，線分 AB の左右の三角形の部分にそれぞれ図４ａや図５の作図を適用することができる．線分の左側に図４ａおよび図５ａと同じ要領で作図をすると図９の

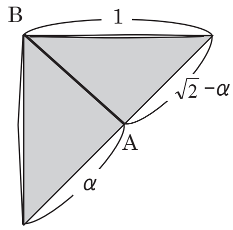

図８

ようになる．ただし，α の値によっては作図できないこともある．

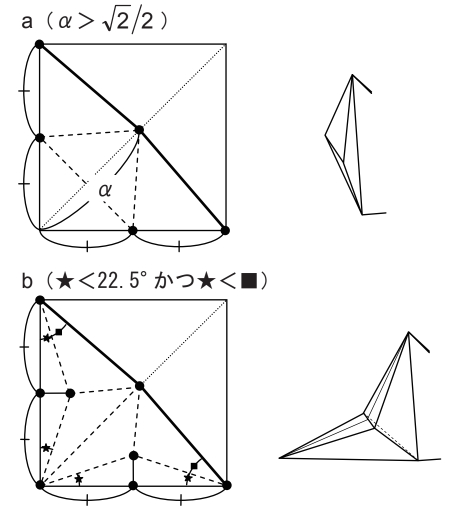

図9

また，点Bの位置が頂点から右側にずれる場合も考えられる（図10）．図11は，線分ABの右側に図9aを適用した四面体，左側は六面体となる作図の例である．この作図は，右側の四面体においては $\alpha'>\gamma$，左側の六面体においては $\alpha+\beta>\gamma$ という条件を満たす必要がある．また，右側の三角形の部分の作図としては，α'，β'，γ の値にもよるが前述の図4，図5で示した多面体が1つの場合の作図が適用できる．左側については，図11のほかにも図12に示す作図が考えられる．図11，図12cは図10で長さ β の辺を閉じて作図し，図12a，図12bは閉じずに作図したものである．

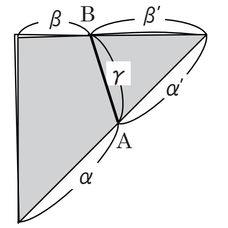

図10

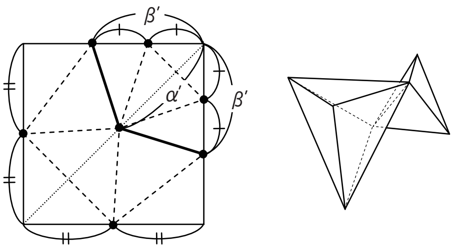

図11

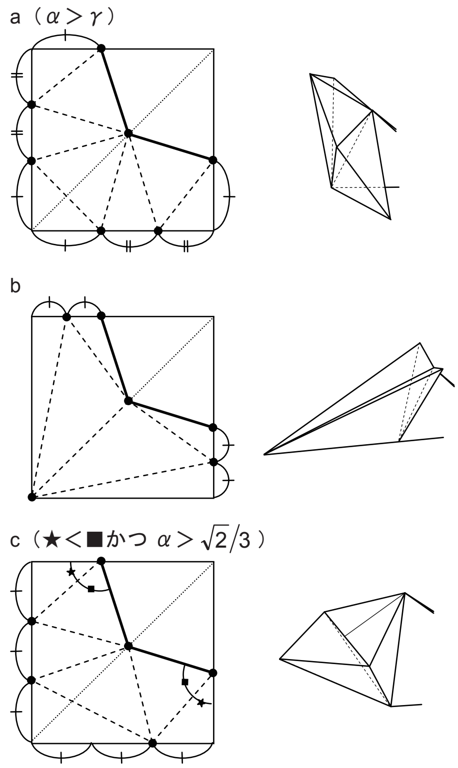

図12

（3）3つの多面体となる場合の作図

さらに，図13のように2本の線分で区切った場合にも，これらの線分でつながる3つの多面体を作図することができる．両側の三角形の部分の作図については，前述の多面体が1つの場合に準じる．中央の線分ABと線分CDで囲まれた部分については図14に示すような作図をすることができる．図14aは，$\beta\neq\beta'$ の場合でも $\beta=\beta'$ の場合でも作図可能であるが，図14bは，$\beta=\beta'$ の場合のみ作図可能である．また，いずれの作図も，点Aと点Cが同じ点になる場合にも適用できる．

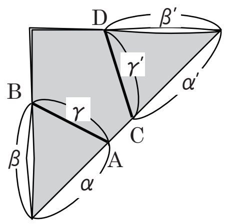

図13

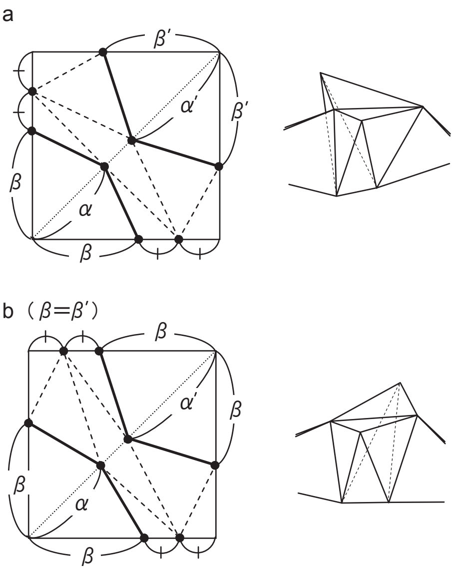

図14

3．図１b に基づく全面多面体の作図法

図１b に基づく場合にも，１つから数個までの多面体からなる全面多面体を作図することができる．ここでも，多面体の個数が１つとなる場合から３つとなる場合までの作図について述べる．

（1） １つの多面体となる場合の作図

図１b に示した面積半分の折り紙を図15のように円筒状に膨らませて，上下の縁を別方向に重ね合わせると１つの多面体ができる．ちょうど，牛乳の三角パックのような形である．上下の縁を重ね合わせる方向を直角になるようにすると作図は図16a，少しずらすと図16b のようになる．これらは，いずれも同じ三角形４つでできる等面四面体になる．

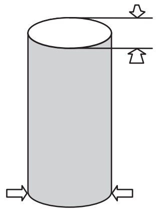

図15

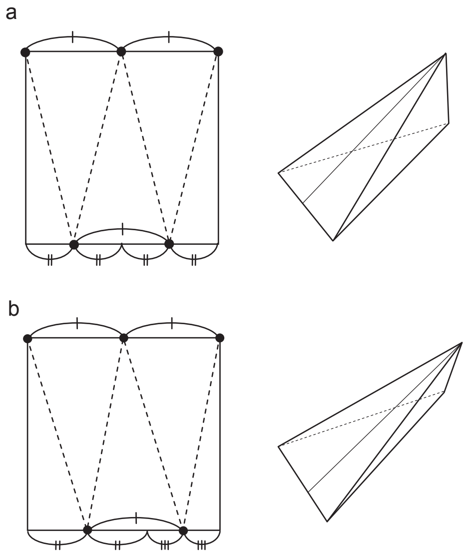

図16

また，図15の円筒から図17のように折り紙の両端を少しずらして重ねることにより，多面体を作図することができる．この場合には両端の部分でふたを作るようなイメージで作図をすることになる（図18）．

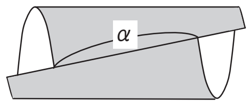

図17

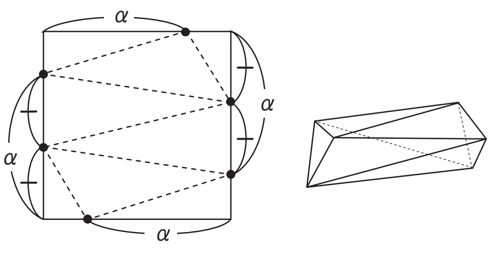

図18

さらに，図19のように，円筒にせず，両端を閉じて上から空気を入れて膨らみをもたせ，上の部分でふたを作るようなイメージで全面多面体を作図することもできる（図20）．

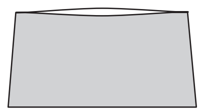

図19

（★，☆＜45° かつ α＜1/4）

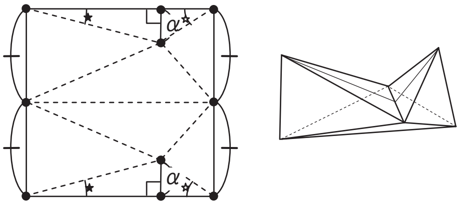

図20

（2） 2つの多面体となる場合の作図

多面体が２つの場合は，例えば円筒であれば，上下の縁は同じ方向に重ね合わせ，途中を別方向に押しつぶすようにして重ね合わせる．図21は，円筒の途中の押しつぶし方の基本的な方法を示したものである．

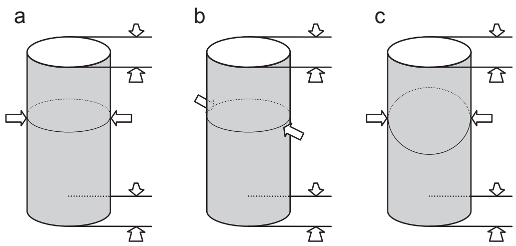

図21

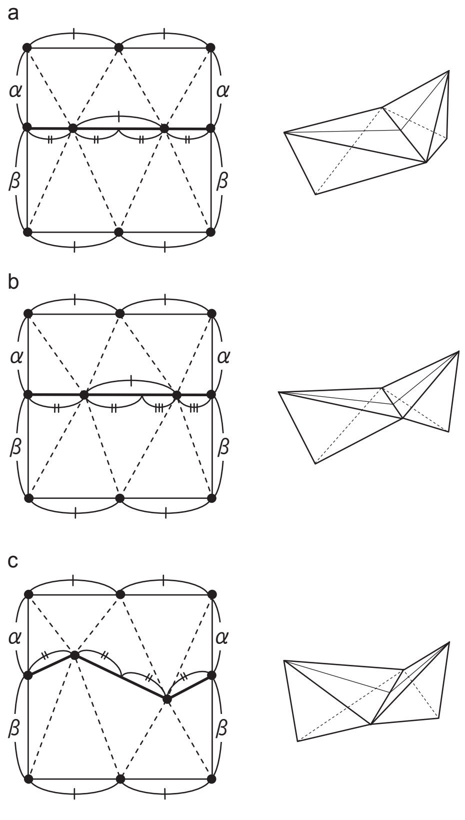

図22

展開すると，図21a は上下の辺と平行に区切る線分があり，図16a のような多面体を２つつなげたものとなる（図22a）．図21b は上下の辺と平行に区切る線分があるが，図16b のような多面体を２つつなげたものとなる（図22b）．図21c は区切り線が斜めになるように重ね合わせたものである（図22c）．このいずれの場合にも，α と β はそれぞれ1/4より長くなければならない．

また，図17から２つの多面体を作る場合には，基本的には前述の円筒の場合と同様，円筒の途中を押しつぶして重ねるようなイメージで作図をすることになる．例えば図23に示す作図になる．

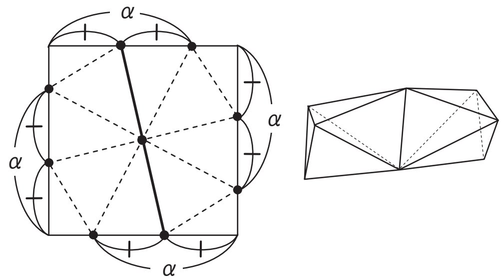

図23

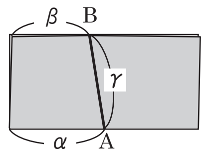

図24

さらに，多面体が２つの場合には，図19のように長方形を円筒状に膨らませずに，そのまま１本の線分で区切って，左右それぞれの部分を多面体に折ることもできる（図24）．図24の左部分を使って多面体を作図すると図20に示した作図のほかに図25に示す作図が考えられるが，基本的にはこれらを左右に組み合わせて全面多面体を作図することができる．ただし，両側とも図25a の場合には２つの多面体が線分でつながった全面多面体となり問題はないが，図25b と図25c を組み合わせて作図すると，できあがった２つの多面体が線分 AB を含む平面で接する場合もあるので注意が必要である．

なお，図24の左側が三角形となる場合には次のように考えられる．$\alpha=0$ の場合には，β の値に関わらず図5a を適用したり，図７a において線分

ABに対応する対角線がまっすぐになるよう★と☆をとることにより作図が可能である．また，$\beta=0$の場合にも，αの値に関わらず図5aを適用した作図が可能である．

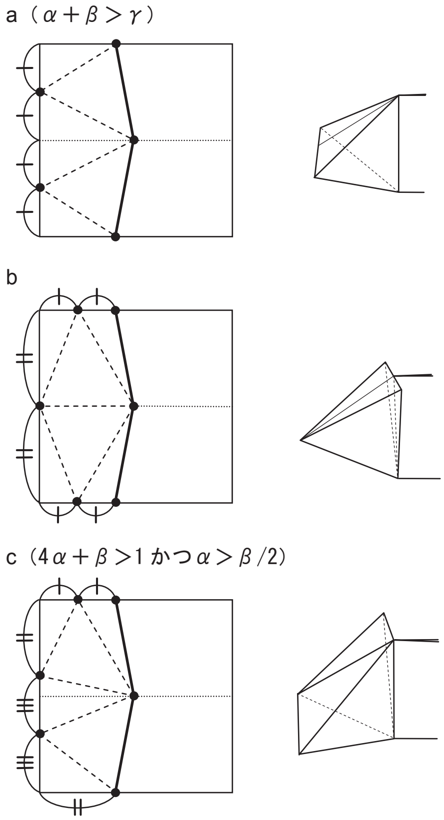

図25

（3）３つの多面体となる場合の作図

まず，図15の円筒から３つの多面体を折りだす作図は図26のようになる．この場合のα，β，γの値は，それぞれ1/4より長くなることが必要である．

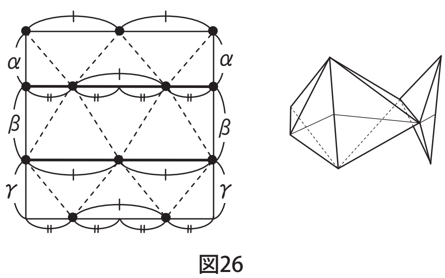

図26

もちろん，各区切り線上の点は，図16bのように横にずらすこともできる．また，図20cのように斜めに区切り線をいれることもできる．

次に，図17から３つの多面体を作る場合には，前述の円筒の場合と同様，円筒部分の途中に区切り線が２本あるように作図する．例えば図27に示す作図になる．

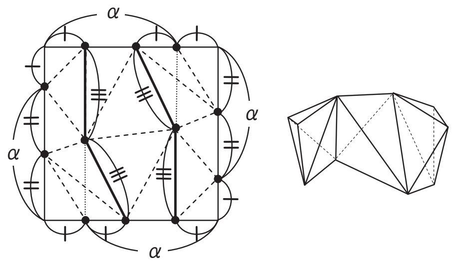

図27

さらに，図24に線分を１本加えて区切り，３つの多面体を作図することもできる．四角形ABDCに図20の作図を適用する場合は図28においてBD＞０であればよい．一方，図29に示した作図をする場合には，AC＞０かつBD＞０で，点Aと点Cをそれぞれ中心とする半径AB，CDの半円を描き，その交点が網かけ部分（線分AB，CD上は点B，D以外は除く）になければならない．両側の四角形（線分の引き方によっては三角形）については，図24をもとに考察した多面体が２つの場合の作図を適用することができる．

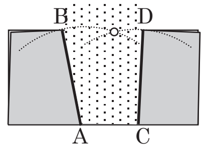

図28

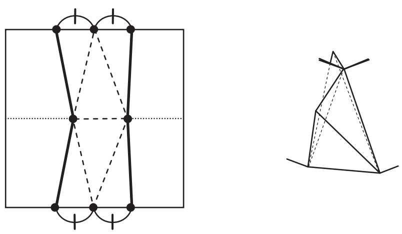

図29

4．図１cに基づく全面多面体の作図法

図１cの場合にも，１つから数個までの多面体からなる全面多面体を作図することができる．

１つの多面体となる場合の考え方として，図30の

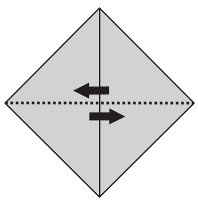

図30

ように点線に沿って，左右にずらすようにして膨らませるイメージで多面体を作図する方法がある．図31が，その作図である．

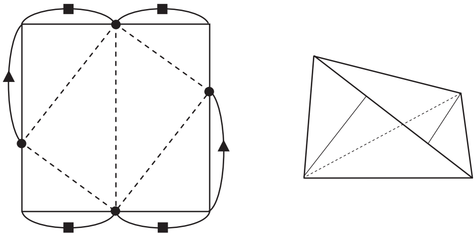

図31

この全面多面体は，同じ三角形４つでできる等面四面体である．また，これは，タカフミ四面体（長方形の紙でできる全面多面体の一種，図32）の変則版である [2]．タカフミ四面体を作図する $1:\sqrt{2}$ の長方形では■と▲を同じ長さにとるが，正方形ではそのようにとると座布団折り（図１ｃ）そのものとなるところから，▲≠1/2ととることにより作図したものである．

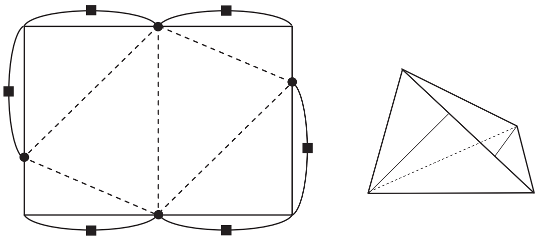

図32

また，１つの多面体の場合には，上下の三角形の部分を左右にずらすのではなく，図１ａの４辺の中央を中心に向かって押すようにして膨らませるイメージで作図する方法もある（図33）．

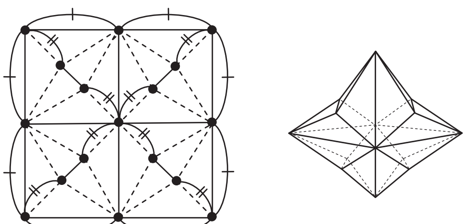

図33

この全面多面体は，中央の膨らみをつぶすように中心を下に押し込むと４つの多面体からなる全面多面体にもなる（図34）．

なお，図34のほかにも２つ以上の多面体からなる全面多面体を作図することができる．例えば上半分に多面体を１つ作図する場合には，図35に示す作図が考えられる．これらは，２節で述べた膨らみにふたをするイメージで辺の縁に作図していた方法を内部に応用した折り方となっている．

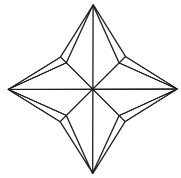

図34

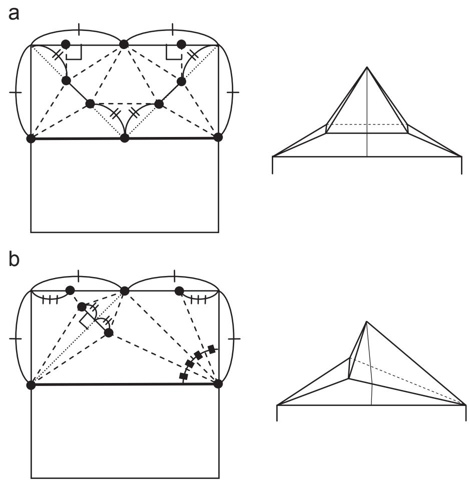

図35

5．図１ｄに基づく全面多面体の作図法

図１ｄに基づく場合にも，１つから数個までの多面体からなる全面多面体を作図することができる．

１つの多面体となる作図法は基本的に２通り考えられる．その１つは，図36のように点線に沿って上半分の三角形と下半分の長方形を左右にずらすようにして膨らませるイメージで作図するものである（図37）．

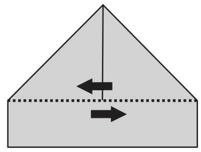

図36

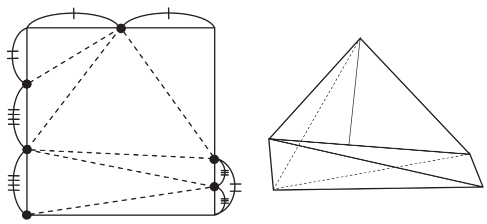

図37

もう1つの作図法は，図38のように下半分の長方形の頂点Aを点線にそって右側にずらすイメージで作図する方法である．この場合は，図30において右下の三角形の折り部分をもとに戻して行うこととも同じである（図39）．

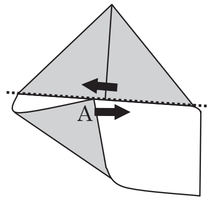

図38

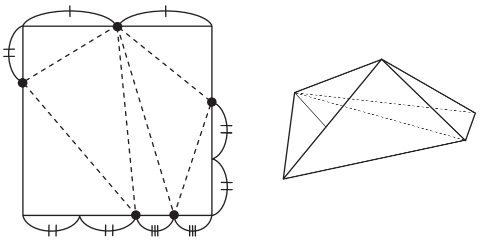

図39

なお，この場合にも複数個の多面体からなる全面多面体を作図することができる．図40は上半部の三角形に図35aと同じ作図を適用し，下半部の長方形に図16aを適用したもので，3つの多面体からなる全面多面体である．

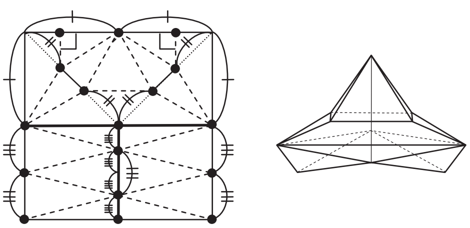

図40

6．おわりに

本稿では，点対象，線対称，縦，横や斜めの並行移動などとなる作図法は除いて記述した．また，全面多面体の作り方として，図1で示した面積半分の折り方をもとに，それを立体へと変化させることに主眼をおいて考察した．

さらに，本稿で述べた多面体は凸多面体となるものが多かったが，折り線を加えることにより多くの凹多面体を作ることも可能である．例えば，図41に示した多面体は，図4aの作図に一手間加えて頂点Aの部分を内側に折り返した場合の作図である．この場合，折り返す部分が他の面と接することがないよう点Pを決める必要がある．その方法として図42に示すように，AQ＝ARとなるように線分QRを折った後，点Aが∠PAQの四等分線となる線分AS上にくるように点Qを通る線分で折り，その線分と辺ABとの交点を点Pとする．この折り位置を少しずらして新しい折線を加えることによって，図43に示す作図も可能となる．

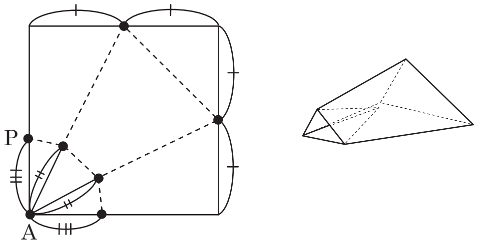

図41

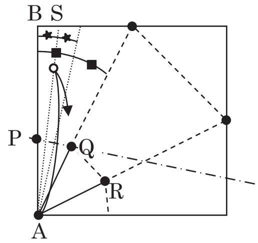

図42

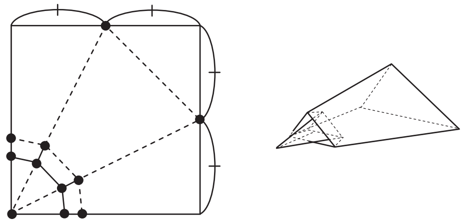

図43

一方，本稿では基本的に多面体の数が3つまでの場合について述べた．いささか折りは複雑になるが，図44に示すように4つや5つの多面体からなる全面多面体も作図することができる．図44aは外側2つに図4a，内側2つに図5aを適用したもの，図44bは左から図25a，図29，図20，図5aを適用したもの，図44cは左上と右上に図7a，左下と右下に図29，中央に図20を適用したものである．

また，現実に折ることは困難かもしれないが，例えば図1bにおいて縦に平行な区切り線をたくさん折り，区切り線で囲まれたそれぞれの長方形の部分に図20の作図を適用すると，一枚の正方形からいくつでも多面体を作ることが理論的には可能である．

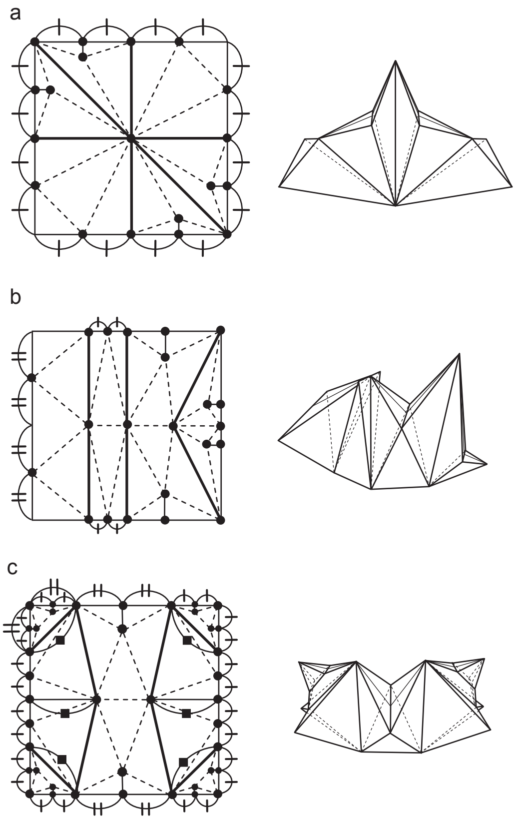

図44

実際には，本稿で述べた以外にも多くの種類の全面多面体が存在すると考えられる．

本稿では，算数や数学の教材の一つとして，全面多面体の作図法を考察した．使用した正方形の折り紙は一般的であり，図4a，図16a，図31に示した作図法は簡単で，かつ基本的な作図法であるから，平面から立体への変化を実感できる良い教材となる．また，２つ以上の多面体となる場合には，区切り方や作図の組み合わせ方を工夫してできあがった立体の形を楽しむこともできる．さらに，ここで述べていない新しい作図法を見つけることに挑戦すれば，創意工夫の楽しさ，そして発見の喜びを体験することができる．

なお，本稿では体積の計算を行っていないが，体積については今後の課題としたい．

参考文献

[1] 阿部　恒，すごいぞ折り紙ー折り紙の発想で幾何を楽しむ，日本評論社，2003.

[2] 芳賀和夫，オリガミクスⅡ，日本評論社，2005.